

# 用有限元极限平衡法分析边坡的稳定性

王连捷<sup>1</sup> 周春景<sup>1</sup> 吴珍汉<sup>1</sup> 廖怀军<sup>2</sup> 孙东生<sup>1</sup> 王 薇<sup>1</sup>

(1. 中国地质科学院地质力学研究所, 北京 100081; 2. 重庆 136 地质队基础工程勘察设计院, 重庆 401147)

**提要:**用有限元分析为基础的极限平衡法计算了边坡安全系数,并将结果与摩尔-库仑屈服准则、外接圆 D-P 屈服准则强度折减法得到的结果、以及 Spencer(极限平衡)法的结果进行了比较,结果表明,有限元极限平衡法计算的边坡安全系数与摩尔-库仑屈服准则强度折减法和 Spencer 法的结果很一致,而 D-P 准则强度折减法得到的结果偏差较大。叙述了存在已知滑动面和不存在滑动面时有限元极限平衡法的计算方法。用大型通用有限元软件,如 ANSYS 等,可方便地进行这种方法的边坡安全系数的计算,并有足够的精度。

**关键词:**边坡安全系数;强度折减法;极限平衡;有限元

**中图分类号:**P554 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-3657(2008)05-1031-06

有限元强度折减法是边坡稳定分析的一种有效方法,近年来颇受关注。很多学者<sup>[1-6]</sup>对此进行了深入系统的研究。但是有限元强度折减法所得的安全系数与所使用的屈服准则有关。不同的屈服准则得到的安全系数不同,外接圆 D-P 准则得到的安全系数偏差最大。而目前流行的大型软件,除 FLAC 等软件外,其他如 ANSYS 等大型软件,只有外接圆 D-P 准则,这给边坡稳定安全系数分析带来不便。而以有限元分析为基础的极限平衡法,其结果与摩尔-库仑屈服准则的结果比较一致。用 ANSYS 等软件可以快速简便地实现有限元极限平衡法的计算,给出较准确的安全系数。是边坡稳定性分析的一种简便方法。

## 1 有限元极限平衡法

有限元极限平衡法是以有限元计算为基础,用有限元计算结果得出的应力,根据极限平衡原理,计算安全系数。假定滑动面已知,则利用有限元计算的结果,可由下式得出沿滑动面上的法向应力  $\sigma$  和剪应力  $\tau$ <sup>[7,8]</sup>:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha \quad (1)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (2)$$

上式中  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  为滑面上的正应力和剪应力,  $\alpha$  为滑面的法线与 X 轴的夹角。根据摩尔-库仑准则可由下式得到沿滑动面的抗滑力  $R$  和下滑力  $T$ :

$$R = \int_0^l (c + \sigma \tan \varphi) dl \quad (3)$$

$$T = \int_0^l \left( -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right) dl \quad (4)$$

考虑到整体力矩或整体力的平衡,整体边坡的安全系数为<sup>[4]</sup>:

$$F = \frac{R}{T} \quad (5)$$

式中  $C$  为内聚力;  $\varphi$  为内摩擦角。

## 2 有限元强度系数折减法

有限元强度系数折减法是将边坡介质的强度参数  $c, \varphi$  值同时除以一个折减系数  $F_s$  得到一组新的

强度,如式(6)和(7),输入计算机反复进行试算,当达到临界状态,发生剪切破坏滑动面时,计算机将不收敛,此时的折减系数即为安全系数。

$$C' = \frac{c}{F_s} \tag{6}$$

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{1}{F_s} \tan \varphi\right) \tag{7}$$

### 3 屈服准则

安全系数大小与程序采用的屈服准则有密切关系,不同的准则得到的安全系数不同。摩尔-库仑准则(M-C 准则)是边坡稳定性分析中广泛采用的屈服准则,适用于岩土工程。摩尔-库仑准则的表达式如下<sup>[8]</sup>:

$$\frac{1}{3} I_1 \sin\phi + \left[ \cos\theta_\sigma - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\theta_\sigma \sin\phi \right] \sqrt{J_2} - c \cos\phi = 0 \tag{8}$$

由于摩尔-库仑准则的屈服面为不规则的六角形截面的角锥体表面,存在尖顶和棱角,给数值计算带来困难。除少数软件,如 FLAC 等有限差分等软件采用摩尔-库仑准则外<sup>[9]</sup>,大多数大型有限元软件,如 ANSYS 软件, MARC 软件等多采用 Drucker-Prager 准则,简称 D-P 准则,是对摩尔-库仑准则的近似。其塑性行为为理想塑性,考虑了由于屈服而引起的体积膨胀。D-P 准则的通用表达式如下。

$$aI_1 + \sqrt{J_2} = K \tag{9}$$

式(8)及式(9)中,  $c$  为内聚力,  $\varphi$  为内摩擦角,  $\theta_\sigma$  为洛德角,  $I_1$  为应力张量第一不变量,  $J_2$  为应力偏张量第二不变量<sup>[7,8]</sup>,  $a, k$  为与  $c, \varphi$  有关的常数,其表达式为:

$$a = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}, \quad K = \frac{6c \cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$$

变换  $a$  和  $k$  的表达式可以得到不同的准则。

ANSYS 所示软件使用的准则为外接圆 D-P 准则<sup>[10]</sup>,其屈服面如图 1。

### 4 均质边坡安全系数的计算

通过实例说明基于有限元分析的极限平衡法计算均质边坡安全系数的方法。均质边坡坡高  $H=20$  m,计算坡角为  $\beta=30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$  时的安全系数。边坡的物理力学参数:弹性模量为 10000 MPa;泊松比

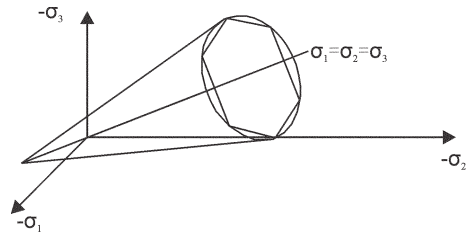


图 1 摩尔-库仑屈服面(多边形)和 D-P 屈服面(外接圆)  
Fig.1 Yield surface for D-P and Mohr-Coulomb

为 0.25;密度为 2500 kg/m<sup>3</sup>;内聚力  $C$  为 42 kPa;内摩擦角为 17°。

首先用 ANSYS 软件进行强度折减系数的计算,求出临界滑动面,然后,沿滑动面做出路径分析(图 2)。再用初始的  $c, \varphi$  值,即不进行折减的情况下进行弹塑性计算,得出沿滑动面的正应力  $\sigma_x, \sigma_y$  及剪应力  $\tau_{xy}$  的分布(图 3)。本文规定负值为压应力,正值为拉应力。

利用式(1)及(2)计算滑动面上垂直于滑动面的法向应力  $\sigma$  和平行于滑动面的剪应力  $\tau$  (图 4)。用式(3)及式(4)计算滑动面上的抗滑阻力  $R$  及下滑力  $T$ (图 5),用式(5)计算安全系数(图 6)。滑面的法线与 X 轴的夹角可通过对路径求导数获得。

为了进行对比,还用 FLAC 软件进行了计算(表 1)。由表 1 可见,用有限元强度折减法进行边坡稳定性安全系数计算时,D-P 准则安全系数偏差最大,而有限元极限平衡法结果偏差最小,与 FLAC 软件摩尔-库仑准则的结果以及 Spencer 法的结果都很接近。有限元极限平衡法与摩尔-库仑准则的计算

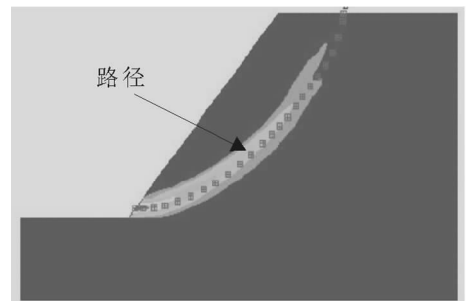


图 2 滑动面和路径  
Fig.2 Failure surface and path

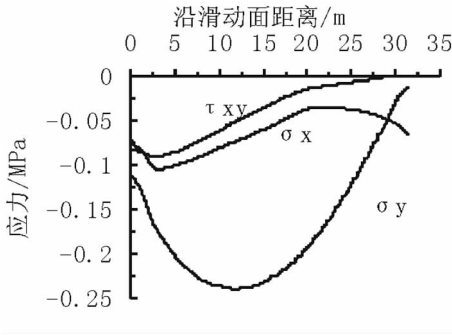


图 3 初始  $C, \varphi$  值时,沿滑动面的应力分布  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  分别为正应力和剪应力

Fig.3 Stress distribution along the failure surface.  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  are normal stresses;  $\tau_{xy}$  is the shear stress

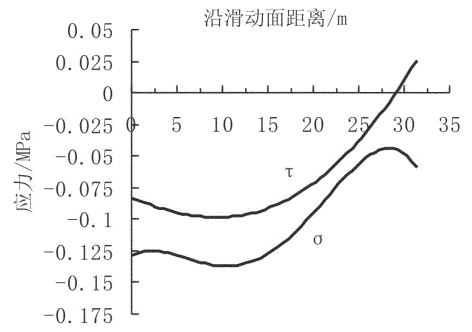


图 4 初始  $C, \varphi$  值时,垂直于滑动面的法向应力  $\sigma$  和平行于滑动面的剪应力  $\tau$

Fig.4 Normal stress  $\sigma$  perpendicular to the failure surface and shear stress  $\tau$  parallel to the failure surface at the initial  $C, \varphi$

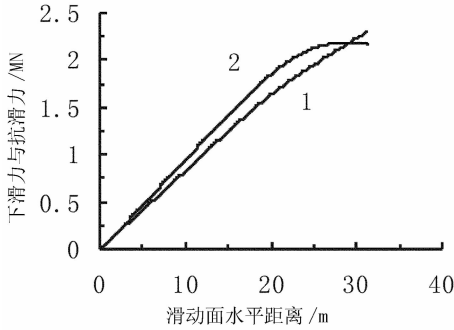


图 5 沿滑动面的抗滑力 R 和下滑力 T 的积分  
1—抗滑力 R 的积分;2—下滑力 T 的积分

Fig.5 Integral of the sliding resistance R and the sliding force T along the failure surface of the slope

1—Integral of the sliding resistance R; 2—Integral of the sliding force T

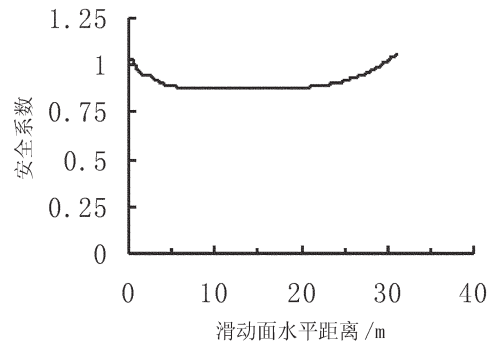


图 6 沿滑动面的安全系数

Fig.6 Safety factor along the failure surface of the slope

表 1 安全系数计算结果

Table 1 Safety factor obtained by calculation

| 边坡角 $\beta / ^\circ$ | 安全系数         |              |             |                           | 安全系数偏差/% |         |
|----------------------|--------------|--------------|-------------|---------------------------|----------|---------|
|                      | ①强度折减法 DP 准则 | ②ANSYS 极限平衡法 | ③FLAC 强度折减法 | ④Spencer 法 <sup>[2]</sup> | (②-③)/③  | (①-③)/③ |
| 30                   | 1.85         | 1.44         | 1.46        | 1.46                      | -1.37    | 26.71   |
| 40                   | 1.43         | 1.22         | 1.20        | 1.21                      | 1.67     | 19.17   |
| 50                   | 1.24         | 1.06         | 1.03        | 1.04                      | 2.91     | 20.39   |

结果相比,偏差小于 3%。这样的精度是可以接受的。而强度折减法 D-P 准则计算结果,其偏差可达 26.7%。即使进行理论校正<sup>[2]</sup>,其结果也有一定的分散性。

## 5 存在软弱滑动面的边坡安全系数的计算

对于存在软弱滑动面的边坡,可直接进行初始

$C$ 、 $\varphi$  值情况下, 弹塑性有限元计算, 然后直接沿已知滑动面做路径分析, 计算安全系数。如果要知道临界滑动面上塑性变形情况, 可进行强度折减系数计算。

下面通过三峡库区滑坡实例进行分析。

三峡库区某边坡位于重庆市奉节县, 边坡之上有大量居民住宅楼、工厂、企业单位, 涉及人口 5000 多人, 房屋面积约  $19 \times 10^4 \text{ m}^2$ 。一旦失稳滑动, 影响巨大。

边坡已进行了详细地质勘察, 边坡沿倾向剖面长约 450 m, 后缘高度约 100 m。钻井勘察证实, 边坡存在软弱滑动面(图 7)。

通过采样和现场物理力学参数测试, 经平均处

理后, 得物理力学参数如表 2。

由于该滑坡存在已知的滑动面, 因而, 可直接进行有限元计算, 不必寻找滑动面。用初始的  $c$ 、 $\varphi$  值, 使用外接圆 D-P 准则, 进行弹塑性有限元计算, 将计算结果沿已知滑动面做路径(图 8), 得出沿滑动面的应力分布。进而求出抗滑力、下滑力和安全系数, 以及安全系数沿滑动面的变化(图 9)。

为了进行比较, 还用 FLAC 和 ANSYS 软件进行了强度系数折减法计算, 安全系数如表 3, 滑动面上的塑性变形情况如图 10。

计算结果表明, 有限元极限平衡法与摩尔-库仑准则强度系数折减法结果很一致, 而外接圆 D-P 准则强度系数折减法所得安全系数偏差较大, 偏差

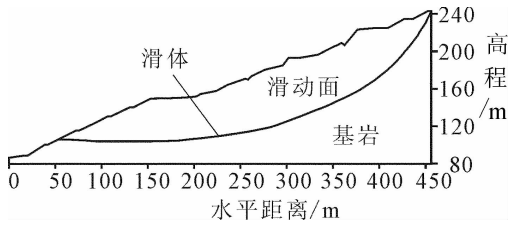


图 7 三峡库区某边坡剖面

Fig.7 Profile of a certain slope in the Three Gorges reservoir area

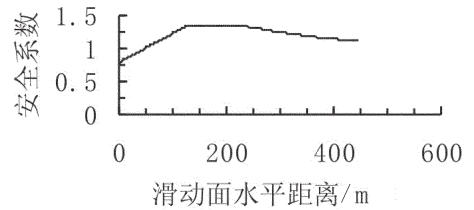


图 9 三峡库区某边坡沿滑动面的安全系数

Fig.9 Safety factor along the failure surface of a slope in the Three Gorges reservoir area

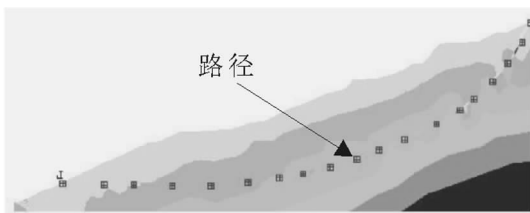


图 8 初始  $c$ 、 $\varphi$  值时, 三峡库区边坡应力等值线和路径

Fig.8 Stress contours and path of the slope in the Three Gorges reservoir area at the initial  $c$  and  $\varphi$

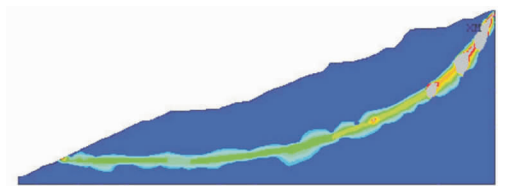


图 10 三峡库区某边坡沿滑动面的塑性主剪应变

Fig.10 Principal plastic shear strain along the failure surface of a slope in the Three Gorges reservoir area

表 2 三峡库区某边坡物理力学参数

Table 2 Physical-mechanical parameters of a slope in the Three Gorges reservoir area

|         | 弹模(MPa) | 泊松比  | 密度 ( $\text{kg/m}^3$ ) | 内聚力 C(MPa) | 内摩擦角 $\varphi^\circ$ |
|---------|---------|------|------------------------|------------|----------------------|
| 滑体      | 4900    | 0.32 | 2300                   | 0.04       | 25                   |
| 滑面 (前部) | 577     | 0.33 | 2300                   | 0.02       | 21                   |
| 滑面 (后部) | 577     | 0.33 | 2300                   | 0.015      | 19                   |
| 基岩      | 38000   | 0.32 | 2400                   | 0.05       | 25                   |

表 3 三峡库区某边坡安全系数  
Table 3 Safety factor of a slope in the  
Three Gorges reservoir area

| 安全系数 |      |      |         |         |
|------|------|------|---------|---------|
| ①    | ②    | ③    | 偏差/%    |         |
|      |      |      | (①-②)/① | (①-③)/① |
| 1.13 | 1.13 | 1.40 | 0       | 23.9    |

注:①为摩尔-库仑准则 FLAC 软件;②有限元极限平衡法 ANSYS 软件;③D-P 准则 ANSYS 软件。

为 23.9%(表 3)。

有限元极限平衡法可以给出沿滑动面强度发挥程度(图 6,图 9)。图 9 表明,边坡前缘强度发挥程度较高,中部发挥程度相对较低。而图 6 中,强度沿滑动面的发挥情况则与图 9 不同。说明不同的边坡其强度沿滑动面发挥的情况不同。沿滑动面强度发挥程度可为边坡加固设计提供依据。

## 6 结论

(1)基于有限元分析的极限平衡法得出的安全系数与传统的极限平衡法(Spencer 法),摩尔-库仑准则强度系数折减法的结果十分接近。可用有限元极限平衡法计算安全系数。

(2)当存在已知滑动面时,可直接将有限元计算结果,通过已知滑动面的路径分析,进行安全系数的计算。滑动面未知时,可先用 ANSYS 软件进行强度系数折减法计算,找出滑动面,画出路径,然后利用初始  $c, \varphi$  值的弹塑性计算结果,通过路径分析,计算安全系数。

(3)外接圆 D-P 准则所得安全系数偏差较大,且具有一定的分散性。但可以给出滑动面和塑性分布。因此,外接圆 D-P 准则强度系数折减法与有限元极限平衡法相结合,既可给出较精确的安全系数又可给出塑性变形。

(4)ANSYS 软件具有强大的功能和广泛的普及性,用 ANSYS 软件可快速的进行极限平衡法安全系数的计算,与强度系数折减法相结合,弥补外接圆 D-P 准则安全系数偏大的缺点。

### 参考文献 (References):

[1] 连镇营,韩国城,孔宪京. 强度折减有限元法开挖边坡的稳定性

[J]. 岩土工程学报, 2001, 23 (4):407 -411.  
Lian Zhenying, Han Guocheng, Kong Xianjing. Strength reduction FEM for slope stability [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23 (4):407 -411 (in Chinese with English abstract).

[2] 赵尚毅,郑颖人,时卫民,等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3):343-346.  
Zhao Shangyi, Zheng Yingren, Shi Weimin, et al. Analysis on safety factor of slope by strength reduction FEM [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(3):343-346(in Chinese with English abstract).

[3] 赵尚毅,郑颖人,邓卫东. 用有限元强度折减法进行节理岩质边坡稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报,2003, 22(2):254-260.  
Zhao Shangyi, Zheng Yingren, Deng Weidong. Stability analysis on jointed rock slope by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22 (2):254 -260 (in Chinese with English abstract).

[4] 时卫民,郑颖人,张鲁渝. 边坡稳定性分析的有限元法[J]. 地下空间, 2001, 21(5):450-454.  
Shi Weimin, Zheng Yingren, Zhang Luyu. Stability analysis of rock slope by finite element method [J]. Chinese Journal of Underground Space, 2001, 21(5):450-454(in Chinese).

[5] Dawson, E M, Roth, W H, Drescher, A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. Géotechnique, 1999, 49(6):835-840.

[6] Griffiths, D V, Lane, P A. Slope stability analysis by finite elements [J]. Géotechnique, 1999, 49(3):387-403.

[7] 尹祥础. 固体力学[M]. 北京:地震出版社, 1985:11-22.  
Yin Xiangchu. Solid Mechanics [M]. Beijing:Seismological Press, 1985:15-17(in Chinese).

[8] 于学馥,郑颖人,刘怀恒,等. 地下工程稳定分析[M]. 北京:煤炭工业出版社,1983:124-136.  
Yu Xuefu, Zheng Yingren, Liu Huaiheng, et al. Stability Analysis of Surrounding Rock of Underground Engineering [M]. Beijing: Coal Industry Press, 1983:132-134(in Chinese).

[9] 刘波,韩彦辉. FLAC 原理、实例与应用指南[M]. 北京:人民交通出版社, 2005:609-612.  
Liu Bo, Han Yanhui. Guide of Theory and Example Application of FLAC[M]. Beijing:China Communication Press, 2005:609-621 (in Chinese).

[10] 叶裕明,刘春山,沈火明,等. ANSYS 土木工程应用实例[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2005:217-219.  
Ye Yuming, Liu Chunshan, Shen Huoming, et al. Application Example of ANSYS in Civil Engineering[M]. Beijing:China Water Resources and Electric Power Press, 2005:217-219(in Chinese).

## Slope stability analysis by the limit equilibrium method based on the finite element method

WANG Lian-jie<sup>1</sup>, ZHOU Chun-jing<sup>1</sup>, WU Zhen-han<sup>1</sup>,  
LIAO Huai-jun<sup>2</sup>, SUN Dong-sheng<sup>1</sup>, WANG Wei<sup>1</sup>

(1. *Institute of Geomechanics, Chinese Academy of Geological Sciences, Beijing 100081, China;*

2. *Chongqing Institute of Engineering Exploration and Design, Chongqing 401147, China*)

**Abstract:** The safety factor of slope is calculated by using the limit equilibrium method based on the finite element analysis (LEMFEA). The results are compared with the results of the strength reduction of the Mohr-Coulomb criterion and circumscribed circle D-P criterion and results of the Spencer method. The comparison shows that the safety factor calculated by LEMFEA is in good agreement with those calculated by the strength reduction of the Mohr-Coulomb criterion Spencer method but is significantly deviated from the result obtained by the strength reduction of the D-P criterion. The calculation method of LEMFEA is described for the existence of the known sliding surface and non-existence of the sliding surface. Large-scale general finite element softwares, such as ANSYS, are used; therefore the calculation of the slope safety factor with this method may be performed easily and has a enough accuracy.

**Key words:** slope safety factor; strength reduction; limit equilibrium; finite element

---

**About the first author:** WANG Lian-jie, male, born in 1933, professor, engages in the study of geohazards, in-situ stress measurement and application of stress field modeling; E-mail: wanglj01@sina.com.